

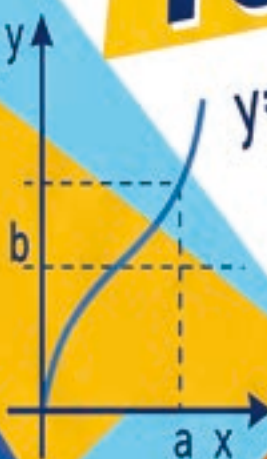
OLIMPIADA MATEMÁTICA

$$a^2+b^2=c^2$$

$$E=mc^2$$

$$f(x)=x^2$$

ÁLVARO,
TÚ SÍ PUEDES



$$y=mx+c$$



$$\cos(\theta)$$

Problemas de preparación para Olimpiada Matemática Escolar

1.º de ESO

Generados con la IA chatGPT

Ejercicio 1

Enunciado

En una estantería hay 24 libros.

Todos son de Matemáticas o de Ciencias.

Hay 8 libros de Ciencias.

Además, exactamente la mitad de los libros de Matemáticas tienen la tapa azul.

¿Cuántos libros de Matemáticas tienen la tapa azul?

Planteamiento

Debes averiguar primero cuántos libros de Matemáticas hay.

Después tendrás que calcular la mitad de esa cantidad.

Guía paso a paso

1. Cuenta primero el número total de libros.
 2. Resta los libros de Ciencias.
 3. Obtendrás los libros de Matemáticas.
 4. Calcula la mitad.
 5. Comprueba que el resultado es un número entero.
-

Ejercicio 2

Enunciado

Ana tiene tres monedas.

Una es de 2 €.

Otra es de 1 €.

La tercera también es una moneda de euro.

Con las tres monedas consigue pagar exactamente 3,50 €.

¿Cómo es posible?

Planteamiento

No empieces sumando automáticamente.

Piensa primero en todas las monedas de euro que existen.

Busca una combinación posible.

Guía paso a paso

1. Escribe las monedas de euro que conoces.
2. Ya sabes que dos monedas son de 2 € y 1 €.
3. Calcula cuánto suman esas dos.
4. Averigua cuánto falta para llegar a 3,50 €.
5. Comprueba si existe esa moneda.

Ejercicio 3

Enunciado

Un jardín tiene forma de rectángulo.

Su perímetro mide 34 m.

El lado largo mide 11 m.

¿Cuánto mide el lado corto?

Planteamiento

Recuerda cómo se calcula el perímetro de un rectángulo.

El perímetro está formado por dos lados largos y dos lados cortos.

Guía paso a paso

1. Escribe la fórmula del perímetro.
2. Sustituye el lado largo por 11.
3. Calcula cuánto suman los dos lados largos.
4. Resta esa cantidad al perímetro.
5. Divide entre dos.
6. Comprueba el resultado.

Ejercicio 4

Enunciado

Laura escribe los números:

3, 6, 12, 24, ...

¿Cuál será el sexto número de la sucesión?

Explica cómo lo has descubierto.

Planteamiento

Observa qué ocurre de un número al siguiente.

No busques una fórmula complicada.

Fíjate en el patrón.

Guía paso a paso

1. Compara dos números consecutivos.
 2. Averigua qué operación se repite.
 3. Calcula el quinto término.
 4. Calcula el sexto.
 5. Comprueba que el patrón continúa.
-

Ejercicio 5

Enunciado

Tres amigos, Carlos, Marta y Sofía, participan en una carrera.

Sabemos que:

- Carlos llegó antes que Marta.
- Sofía no llegó la primera.
- Marta no llegó la última.

¿En qué orden llegaron?

Planteamiento

Haz una lista con las posibles posiciones.

Ve eliminando las que contradicen las pistas.

Guía paso a paso

1. Escribe las posiciones: primero, segundo y tercero.
 2. Carlos debe ir antes que Marta.
 3. Sofía no puede ocupar el primer puesto.
 4. Marta no puede ocupar el último.
 5. Busca la única posibilidad que cumple todas las condiciones.
-

Ejercicio 6

Enunciado

En una caja hay bolas rojas, azules y verdes.

Hay 18 bolas en total.

Sabemos que:

- Hay el doble de bolas rojas que verdes.
- Hay 6 bolas azules.

¿Cuántas bolas hay de cada color?

Planteamiento

Debes averiguar primero cuántas bolas no son azules.
Después utiliza la relación entre las rojas y las verdes.
No hagas pruebas al azar.

Guía paso a paso

1. Calcula cuántas bolas no son azules.
 2. Piensa que las rojas son el doble que las verdes.
 3. Imagina que las verdes son una cantidad desconocida.
 4. Expresa las rojas en función de las verdes.
 5. Suma ambas cantidades.
 6. Comprueba que el total es 18.
-

Ejercicio 7

Enunciado

Un reloj marca las 3:00.
¿Cuántos grados forman las agujas del reloj en ese momento?

Planteamiento

Recuerda dónde se encuentra cada aguja cuando el reloj marca una hora exacta.
Busca el ángulo más pequeño.

Guía paso a paso

1. Dibuja un reloj.
 2. Coloca la aguja minutería.
 3. Coloca la aguja horaria.
 4. Observa el ángulo que forman.
 5. Calcula los grados.
-

Ejercicio 8

Enunciado

Pedro quiere subir una escalera de 12 peldaños.
Puede subir de una vez:

- 1 peldaño
- o 2 peldaños.

Empieza en el suelo.

¿Cuál es el menor número de saltos que necesita para llegar arriba?

Planteamiento

No hace falta contar todas las formas posibles.

Busca la estrategia que permita dar el menor número de saltos.

Guía paso a paso

1. Observa qué salto avanza más.
 2. Piensa si conviene usar siempre ese salto.
 3. Comprueba que llegas exactamente al peldaño 12.
 4. Cuenta los saltos realizados.
-

Ejercicio 9

Enunciado

En una cuadrícula de 4 filas y 4 columnas hay que ir desde la esquina superior izquierda hasta la esquina inferior derecha.

Solo se puede avanzar:

- hacia la derecha;
- hacia abajo.

¿Cuántos movimientos habrá que realizar en total?

Planteamiento

No preguntamos cuántos caminos distintos existen.

Solo debes averiguar el número de movimientos necesarios para llegar al final.

Guía paso a paso

1. Cuenta cuántas filas debes bajar.
 2. Cuenta cuántas columnas debes avanzar.
 3. Suma ambos recorridos.
 4. Comprueba que llegas al destino.
-

Ejercicio 10

Enunciado

Cuatro amigos tienen distintas edades:

- 11 años

- 12 años
- 13 años
- 14 años

Sabemos que:

- Luis es mayor que Ana.
- Marta es menor que Pablo.
- Pablo tiene 14 años.

¿Cuántos años tiene cada uno?

Planteamiento

Utiliza las pistas una a una.

Cada dato elimina varias posibilidades.

Guía paso a paso

1. Escribe las cuatro edades.
2. Coloca primero la edad conocida.
3. Busca quién puede ser mayor que Ana.
4. Comprueba la condición entre Marta y Pablo.
5. Asigna las edades restantes.
6. Verifica todas las pistas.

Ejercicio 11

Enunciado

En una mesa hay 15 fichas colocadas en fila.

Las fichas están numeradas del 1 al 15.

Laura retira todas las fichas cuyo número es múltiplo de 3.

¿Cuántas fichas quedan sobre la mesa?

Planteamiento

Debes averiguar primero cuáles son los múltiplos de 3 entre 1 y 15.

Después cuenta cuántas fichas se retiran y cuántas permanecen.

Guía paso a paso

1. Escribe los números del 1 al 15.
2. Marca los múltiplos de 3.
3. Cuenta cuántos hay.
4. Resta esa cantidad al total.

5. Comprueba que no has olvidado ningún múltiplo.

Ejercicio 12

Enunciado

Un calendario muestra tres días seguidos.

La suma de sus números es 42.

¿Cuáles son esos tres días?

Planteamiento

Tres días consecutivos siempre forman una secuencia de números seguidos.

Busca tres números consecutivos cuya suma sea 42.

Guía paso a paso

1. Llama al día central "n".
 2. Los otros serán el anterior y el siguiente.
 3. Suma los tres números.
 4. Iguala el resultado a 42.
 5. Calcula el valor del día central.
 6. Escribe los tres días.
-

Ejercicio 13

Enunciado

Con 18 palillos iguales se quiere construir un rectángulo.

Los cuatro lados deben estar formados por un número entero de palillos.

¿Cuántos palillos puede tener cada lado?

Busca todas las posibilidades.

Planteamiento

Recuerda que un rectángulo tiene dos lados largos iguales y dos lados cortos iguales.

La suma de todos los palillos utilizados debe ser 18.

Guía paso a paso

1. Llama "a" al lado largo y "b" al lado corto.
2. Escribe la expresión del perímetro.
3. Divide entre 2.

4. Busca todas las parejas de números enteros cuya suma sea 9.
 5. Elimina las que representan el mismo rectángulo.
 6. Comprueba cada opción.
-

Ejercicio 14

Enunciado

Una hormiga recorre el borde de un cuadrado de lado 6 cm.

Sale de un vértice y camina exactamente 15 cm.

¿En qué lado del cuadrado termina?

Planteamiento

Primero calcula cuánto mide todo el borde del cuadrado.

Después sigue el recorrido lado por lado.

Guía paso a paso

1. Calcula el perímetro.
 2. Recorre mentalmente cada lado.
 3. Marca la distancia recorrida.
 4. Averigua cuántos centímetros faltan para llegar a 15.
 5. Localiza el punto final.
-

Ejercicio 15

Enunciado

Cinco cajas están numeradas del 1 al 5.

Solo una contiene un premio.

Las pistas son:

- El premio no está en la caja 1.
- Está en una caja con número impar.
- No está en la caja 5.

¿En qué caja está el premio?

Planteamiento

Ve eliminando las cajas que no pueden contener el premio.

Quédate solo con las que cumplen todas las condiciones.

Guía paso a paso

1. Escribe los números del 1 al 5.

2. Elimina la caja 1.
 3. Conserva solo las cajas impares.
 4. Elimina la caja 5.
 5. Observa cuál queda.
-

Ejercicio 16

Enunciado

María piensa un número.

Si lo multiplica por 4 y después le resta 6, obtiene 30.

¿Qué número había pensado?

Planteamiento

Debes deshacer las operaciones en orden inverso.

Empieza por el resultado final y ve retrocediendo paso a paso.

Guía paso a paso

1. Observa cuál es el resultado final.
 2. Deshaz primero la resta de 6.
 3. Después deshaz la multiplicación por 4.
 4. Comprueba el resultado sustituyendo el número encontrado.
 5. Verifica que se obtiene 30.
-

Ejercicio 17

Enunciado

En una bolsa hay 5 bolas rojas, 4 azules y 3 verdes.

Se saca una bola sin mirar.

¿Cuál es el color que tiene más posibilidades de salir? ¿Cuál tiene menos?

Planteamiento

No es necesario calcular porcentajes.

Basta con comparar cuántas bolas hay de cada color.

Guía paso a paso

1. Cuenta las bolas de cada color.
2. Compara las cantidades.
3. El mayor número indica la mayor probabilidad.
4. El menor número indica la menor probabilidad.

5. Explica por qué.

Ejercicio 18

Enunciado

Un cuadrado está formado por 16 cuadrados pequeños iguales, distribuidos en 4 filas y 4 columnas.

¿Cuántos cuadrados de cualquier tamaño hay en total?

Planteamiento

No cuentes solo los cuadrados pequeños.

Busca también los cuadrados formados al unir varios pequeños.

Guía paso a paso

1. Cuenta los cuadrados de 1×1 .
2. Cuenta los de 2×2 .
3. Cuenta los de 3×3 .
4. Cuenta el cuadrado grande de 4×4 .
5. Suma todos los resultados.
6. Comprueba que no repites ninguno.

Ejercicio 19

Enunciado

Tres amigos juegan una liga en la que cada uno se enfrenta una sola vez a los otros dos.

¿Cuántos partidos se juegan en total?

Planteamiento

Haz una lista de todos los enfrentamientos posibles.

Recuerda que un partido entre Ana y Luis es el mismo que entre Luis y Ana.

Guía paso a paso

1. Escribe los nombres de los tres jugadores.
2. Forma todas las parejas posibles.
3. Evita repetir parejas.
4. Cuenta los partidos.
5. Comprueba que todos han jugado contra los demás.

Ejercicio 20

Enunciado

En un tablero de ajedrez de 8×8 se pintan de negro las cuatro casillas de las esquinas.

¿Cuántas casillas quedan sin pintar?

Planteamiento

Primero averigua cuántas casillas tiene el tablero.

Después resta las que se han pintado.

Guía paso a paso

1. Calcula el número total de casillas.
2. Cuenta cuántas esquinas tiene un cuadrado.
3. Resta las casillas pintadas.
4. Comprueba el resultado.

PROBLEMA 1

Las cajas etiquetadas

Habilidad principal

Razonamiento lógico • Eliminación de posibilidades • Estrategia

Dificultad: ★☆☆☆☆

Antes de empezar...

Una buena estrategia consiste en desconfiar de lo que parece evidente.

En este problema no tendrás que hacer ninguna operación. Solo pensar con orden.

Enunciado

Sobre una mesa hay **tres cajas cerradas**.

Una contiene **solo canicas rojas**, otra contiene **solo canicas azules** y la tercera contiene **canicas rojas y azules**.

Las tres cajas están etiquetadas así:

- **Rojas**

- **Azules**
- **Rojas y azules**

Sin embargo, el encargado del almacén advierte:

Las tres etiquetas están colocadas de forma incorrecta.

Puedes abrir **una sola caja** y sacar **una única canica**, sin mirar el interior. Después de observar su color, deberás colocar correctamente las tres etiquetas.

¿De qué caja debes sacar la canica y cómo puedes averiguar la etiqueta correcta de las tres cajas?

Comprendemos el problema

Antes de intentar resolverlo, piensa en estas preguntas.

- ¿Qué significa que **las tres etiquetas sean incorrectas**?
- ¿Qué caja proporciona más información si sacas una canica?
- ¿Podría bastar una sola observación para identificar todas las cajas?

No empieces probando posibilidades al azar. Busca primero la información más valiosa.

Pista 1

Si abres una caja cuya etiqueta dice **"Rojas"**, ¿podría contener únicamente canicas rojas?

Pista 2

La caja etiquetada **"Rojas y azules"** no puede contener una mezcla. Solo puede contener un único color.

¿Por qué es la mejor elección para sacar una canica?

Pista 3

Imagina que sacas una canica roja.

¿Qué sabes inmediatamente sobre esa caja?

¿Y qué ocurre con las otras dos?

PROBLEMA 2

El puente de piedra

Habilidades que entrena

✓ Organización de la información

- ✓ Estrategia
- ✓ Eliminación de posibilidades
- ✓ Razonamiento lógico

Dificultad: ★★☆☆☆

Una idea antes de empezar

Cuando un problema parece complicado, dibuja un esquema lo más sencillo posible.

Un buen dibujo no resuelve el problema, pero casi siempre ayuda a entenderlo.

Enunciado

Un pequeño pueblo está dividido por un río.

Hay cuatro zonas de paseo, una a cada lado del río, comunicadas por **siete puentes**.

Un turista quiere salir de su hotel, dar un paseo cruzando **cada puente exactamente una vez** y volver al punto de partida.

¿Es posible hacerlo?

Si crees que sí, explica cómo.

Si crees que no, justifica por qué.

Comprendemos el problema

Este no es un problema de cálculo.

Ni siquiera necesitas medir distancias.

La pregunta es otra:

¿Qué condiciones debe cumplir un recorrido para poder pasar exactamente una vez por cada puente?

Haz primero un dibujo sencillo con cuatro zonas y siete puentes.

No importa que el dibujo no sea perfecto.

Pista 1

Olvídate de la forma del río.

Solo importa cómo están unidas las cuatro zonas.

Pista 2

Cada vez que entras en una zona, salvo al principio y al final, también tendrás que salir de ella.

¿Qué significa eso respecto al número de puentes que llegan a cada zona?

Pista 3

Cuenta cuántos puentes llegan a cada una de las cuatro zonas.

¿Qué observas?

Solución

Cada puente une dos zonas.

Cuando recorremos todos los puentes exactamente una vez, ocurre algo importante:

Cada vez que entramos en una zona debemos salir de ella, excepto quizá en el punto de inicio o en el de llegada.

Por ello:

- las zonas intermedias deben tener un número **par** de puentes;
- si queremos empezar y terminar en el mismo lugar, **todas** las zonas deben tener un número par de puentes.

En este problema ocurre que las cuatro zonas tienen un número impar de puentes.

Eso hace imposible construir el recorrido pedido.

No importa el camino que intentemos.

Siempre llegará un momento en el que quedará un puente sin poder cruzar.

Respuesta

No es posible recorrer los siete puentes exactamente una vez y regresar al punto de partida.

¿Qué hemos descubierto?

Acabas de resolver uno de los problemas más famosos de la historia de las Matemáticas.

Lo importante no era encontrar un recorrido.

Lo importante era demostrar que **no podía existir**.

A veces, en Matemáticas, demostrar que algo es imposible es tan valioso como encontrar una solución.

La idea clave

Muchos problemas de recorridos no dependen de las distancias ni de los dibujos.

Dependen únicamente de **cómo están conectados los lugares**.

Esa idea dio origen a una rama de las Matemáticas llamada **teoría de grafos**, que hoy se utiliza para diseñar redes de transporte, internet, GPS y muchas aplicaciones informáticas.

PROBLEMA 3

La balanza del mercader

Habilidades que entrena

- ✓ Razonamiento lógico
- ✓ Pensar hacia atrás
- ✓ Eliminación de posibilidades

Dificultad: ★★☆☆☆

Antes de empezar...

A veces es más útil preguntarse qué no puede ocurrir que intentar encontrar directamente la respuesta.

Enunciado

Un mercader tiene **nueve sacos** aparentemente iguales de arroz.

Todos pesan exactamente **20 kg**, excepto uno, que pesa **21 kg**.

Dispones de una balanza de dos platillos, sin pesas.

¿Cuál es el menor número de pesadas necesarias para localizar con total seguridad el saco más pesado?

Explica cómo lo harías.

Comprendemos el problema

No importa cuánto pesa exactamente cada saco.

Solo necesitas descubrir cuál es el diferente.

Cada pesada puede dar tres resultados:

- pesa más el platillo izquierdo;
- pesa más el derecho;
- ambos pesan igual.

¿Cómo aprovechar al máximo esa información?

Pista 1

No empieces comparando un saco con otro.
Sería demasiado lento.

Pista 2

¿Puedes dividir los nueve sacos en grupos iguales?

Pista 3

Después de la primera pesada, ¿cuántos sacos seguirán siendo sospechosos?

La idea clave

Cada pesada debe proporcionar la mayor información posible.
No siempre gana quien hace más pruebas, sino quien formula mejor la primera.

Un reto

¿Y si hubiera **27 sacos**?
¿Cuántas pesadas serían suficientes?

PROBLEMA 4

El reloj del campanario

Habilidades que entrena

- ✓ Geometría
- ✓ Observación
- ✓ Búsqueda de patrones

Dificultad: ★★☆☆☆

Antes de empezar...

Los relojes esconden mucha geometría.

No pienses en horas.
Piensa en ángulos.

Enunciado

El reloj del campanario marca exactamente las **12:00**.

¿Cuál será la **primera hora** después de las doce en la que las dos agujas formen un ángulo de **180°**?

Da la respuesta con precisión de segundos.

Comprendemos el problema

Las agujas no saltan de minuto en minuto.

Se mueven continuamente.

La aguja pequeña también avanza mientras la grande gira.

Pista 1

¿Cuántos grados recorre cada aguja en un minuto?

Pista 2

No basta con que la aguja grande llegue al 6.

La pequeña también habrá avanzado.

Pista 3

Busca cuándo la diferencia entre ambas posiciones sea exactamente 180°.

La idea clave

Cuando dos objetos se mueven, muchas veces es más sencillo estudiar **la diferencia entre sus velocidades**.

PROBLEMA 5

El patio de los azulejos

Habilidades que entrena

✓ Generalización

✓ Patrones

✓ Geometría

Dificultad: ★★☆☆☆

Antes de empezar...

Cuando una figura crece, no vuelvas a contar desde el principio.

Pregúntate qué cambia de una figura a la siguiente.

Enunciado

Un patio se decora colocando azulejos cuadrados.

La figura 1 está formada por un único azulejo.

En cada nueva figura se añade una fila completa por abajo y una columna completa por la derecha, formando siempre un cuadrado mayor.

Así:

- Figura 1 $\rightarrow 1 \times 1$
- Figura 2 $\rightarrow 2 \times 2$
- Figura 3 $\rightarrow 3 \times 3$
- ...

¿Cuántos azulejos nuevos se añaden al pasar de la figura 24 a la figura 25?

Comprendemos el problema

No hace falta calcular cuántos azulejos tienen las dos figuras.

Solo interesa saber cuántos **se incorporan**.

Haz un dibujo de las figuras 3 y 4.

Pista 1

¿Cuántos azulejos tiene un cuadrado de lado 24?

¿Y uno de lado 25?

Pista 2

En lugar de calcular ambas cantidades por separado, piensa en la fila y la columna que aparecen.

Pista 3

La esquina nueva pertenece a la fila y a la columna.

No la cuentes dos veces.

Respuesta

Se añaden exactamente 49 azulejos.

La idea clave

En muchos problemas de crecimiento es mejor fijarse en **lo que cambia** que volver a contar toda la figura.

PROBLEMA 6

El torneo del instituto

Habilidades que entrena

- ✓ Conteo organizado
- ✓ Combinatoria elemental
- ✓ Búsqueda de patrones

Dificultad: ★★☆☆☆

Antes de empezar...

Cuando aparecen muchas parejas, una lista ordenada suele ser mejor que intentar contarlas de memoria.

Enunciado

En un instituto se organiza un torneo de ajedrez.

Participan **8 alumnos** y cada uno debe jugar **exactamente una partida contra cada uno de los demás**.

Al finalizar el torneo, el profesor pregunta:

¿Cuántas partidas se han jugado en total?

No se permite utilizar ninguna fórmula conocida. Debes razonar la respuesta.

Comprendemos el problema

Cada partida enfrenta a **dos jugadores**.

Si cuentas las partidas jugador por jugador, corres el riesgo de contarlas dos veces.

Busca una forma de evitar ese error.

Pista 1

Empieza por el primer jugador.

¿Contra cuántos rivales juega?

Pista 2

Cuando pases al segundo jugador, ya habrá disputado una partida.

No la vuelvas a contar.

Pista 3

Escribe una suma ordenada.

La idea clave

Cuando un problema consiste en formar parejas, conviene organizar el recuento para que ninguna pareja aparezca dos veces.

PROBLEMA 7

El jardín triangular

Habilidades que entrena

- ✓ Geometría
- ✓ Visualización espacial
- ✓ División de figuras

Dificultad: ★★☆☆☆

Antes de empezar...

Una figura complicada suele esconder otras mucho más sencillas.

Enunciado

Un jardinero ha dibujado un gran triángulo equilátero.

Une los puntos medios de sus tres lados y obtiene cuatro triángulos equiláteros iguales.

Después repite el mismo proceso únicamente sobre el triángulo central.
¿Cuántos triángulos equiláteros aparecen ahora en total?

Comprendemos el problema

No basta con contar los triángulos pequeños.

Hay triángulos de distintos tamaños.

Haz un dibujo antes de empezar.

Pista 1

Cuenta primero los triángulos más pequeños.

Pista 2

Después busca triángulos formados por varios pequeños.

Pista 3

No olvides el triángulo grande.

La idea clave

Cuando una figura está subdividida, conviene contar por tamaños para evitar olvidos o repeticiones.

PROBLEMA 8

La caja de monedas

Habilidades que entrena

- ✓ Invariantes
- ✓ Estrategia
- ✓ Razonamiento lógico

Dificultad: ★★☆☆☆

Antes de empezar...

A veces muchas acciones cambian la apariencia de una situación, pero hay una propiedad que nunca cambia. Esa propiedad se llama invariante.

Enunciado

En una caja hay **15 monedas**, todas mostrando cara.

En cada movimiento debes elegir **exactamente 4 monedas** y darles la vuelta al mismo tiempo.

¿Es posible conseguir que, después de varios movimientos, **todas las monedas queden mostrando cruz?**

Explica tu razonamiento.

Comprendemos el problema

No intentes probar movimientos al azar.

Busca una propiedad que permanezca igual o que cambie siempre del mismo modo.

Pista 1

Cuenta cuántas monedas muestran cara.

Pista 2

Después de un movimiento pueden cambiar entre 0 y 4 caras en distintos sentidos.

¿Qué ocurre con la paridad (par o impar) del número de caras?

Pista 3

Compara la situación inicial con la final.

La idea clave

Los **invariantes** son una de las herramientas más poderosas de las Olimpiadas Matemáticas. En lugar de seguir todos los movimientos, buscamos una propiedad que nunca cambia y usamos esa información para demostrar que algo es posible... o imposible.

PROBLEMA 9

El laberinto cuadriculado

Habilidades que entrena

- ✓ Organización de la información
- ✓ Conteo sistemático
- ✓ Estrategia
- ✓ Visualización espacial

Dificultad: ★★☆☆☆

Antes de empezar...

Cuando un problema tiene muchos caminos posibles, no conviene recorrerlos todos.

Busca una forma ordenada de contarlos.

Enunciado

Un robot se encuentra en la esquina inferior izquierda de una cuadrícula formada por **4 × 4 cuadrados**.

Quiere llegar a la esquina superior derecha.

Solo puede moverse:

- una casilla hacia la derecha;
- una casilla hacia arriba.

¿Cuántos caminos diferentes puede seguir?

Comprendemos el problema

No intentes dibujar todos los recorridos.

Pronto serán demasiados.

Existe una forma mucho más inteligente de contarlos.

Pista 1

Empieza resolviendo una cuadrícula de 1×1 .

Después prueba con una de 2×2 .

Pista 2

¿Cuántas formas hay de llegar a un punto determinado?

Observa que todos los caminos llegan desde la izquierda o desde abajo.

Pista 3

Escribe el número de caminos en cada vértice de la cuadrícula.

Cada número será la suma de los dos anteriores.

La idea clave

Muchos problemas de conteo pueden resolverse **construyendo la respuesta poco a poco**, aprovechando resultados anteriores.

Esta estrategia aparece también en programación, informática y probabilidad.

PROBLEMA 10

La contraseña secreta

Habilidades que entrena

- ✓ Deducción lógica
- ✓ Eliminación de posibilidades
- ✓ Organización de información

Dificultad: ★★☆☆☆

Antes de empezar...

No todas las pistas aportan la misma información.

Empieza siempre por la más restrictiva.

Enunciado

Una caja fuerte se abre con una contraseña formada por **tres cifras distintas**.

Dispones de las siguientes pistas:

682

→ Una cifra es correcta y está en su lugar.

614

→ Una cifra es correcta, pero está en un lugar incorrecto.

206

→ Dos cifras son correctas, pero ambas están en lugares incorrectos.

738

→ Ninguna cifra es correcta.

780

→ Una cifra es correcta, pero está en un lugar incorrecto.

¿Cuál es la contraseña?

Comprendemos el problema

No pruebes combinaciones al azar.

Cada pista elimina muchas posibilidades.

Conviene ir anotando qué cifras ya sabemos que no pueden aparecer.

Pista 1

Empieza por la pista más fácil.

¿Qué cifras puedes eliminar completamente?

Pista 2

Utiliza después la pista **780**.

Solo una de esas cifras puede pertenecer a la contraseña.

¿Cuál?

Pista 3

Ahora analiza las demás pistas una por una.

Cada nueva información reducirá aún más las posibilidades.

La idea clave

Los problemas de deducción no se resuelven probando todas las posibilidades.

Se resuelven **eliminando las imposibles** hasta que solo queda una.

Es la misma estrategia que utilizan los matemáticos, los detectives y muchos programas informáticos.

PROBLEMA 11

Las fichas del dominó

Habilidades que entrena

- ✓ Observación
- ✓ Organización
- ✓ Conteo

Dificultad: ★★☆☆☆ (nivel 1.º ESO)

Antes de empezar...

A veces la respuesta aparece antes si ordenamos la información que si empezamos a calcular.

Enunciado

Sofía coloca en fila todas las fichas de un dominó clásico, empezando por la ficha **0–0** y terminando por la ficha **6–6**.

Mientras las observa, se pregunta:

¿Cuántas veces aparece en total el número 5 en todas las fichas?

Comprendemos el problema

No hace falta escribir todas las fichas.

Piensa únicamente en las que contienen un **5**.

Pista 1

¿Qué fichas tienen un 5?

Pista 2

¿Hay alguna ficha que tenga dos cincos?

La idea clave

No siempre hay que estudiar **todas** las posibilidades.

Muchas veces basta con fijarse únicamente en las que interesan.

PROBLEMA 12

Los escalones del parque

Habilidades que entrena

- ✓ Patrones
- ✓ Generalización
- ✓ Pensamiento algebraico

Dificultad: ★★☆☆☆

Antes de empezar...

Cuando una situación se repite, busca qué cambia y qué permanece igual.

Enunciado

Un parque tiene una escalera muy peculiar.

En el primer tramo hay **3 escalones**.

En el segundo tramo hay **5 escalones**.

En el tercero hay **7 escalones**.

Y así sucesivamente: cada tramo tiene **2 escalones más** que el anterior.

¿Cuántos escalones tendrá el tramo número 25?

¿Y cuántos escalones habrá en total desde el primer tramo hasta el tramo número 25?

Comprendemos el problema

La primera pregunta es sencilla.

La segunda requiere organizar la información.

Busca primero el patrón.

Pista 1

Escribe los cinco primeros términos.

Pista 2

¿Cuánto aumenta cada vez?

Pista 3

Para sumar todos los escalones, prueba a sumar el primero con el último.

La idea clave

Buscar simetrías en una suma puede evitar cálculos largos.

PROBLEMA 13

El camino del jardinero

Habilidades que entrena

- ✓ Estrategia
- ✓ Optimización
- ✓ Geometría intuitiva

Dificultad: ★★☆☆☆

Antes de empezar

El camino más corto entre dos puntos es una línea recta. Pero cuando hay varios puntos, la mejor solución no siempre es la más evidente.

Enunciado

Un jardinero debe regar cuatro árboles situados en los vértices de un cuadrado de 20 metros de lado.

Empieza junto a uno de los árboles y debe visitar los cuatro exactamente una vez.

No necesita volver al punto inicial.

¿Cuál es la menor distancia que puede recorrer?

Explica por qué no puede hacerse un recorrido más corto.

Comprendemos el problema

Dibuja primero el cuadrado.

Después piensa en distintos recorridos posibles.

No basta con encontrar uno corto; hay que justificar que es el mejor.

Pistas

1. ¿Es obligatorio utilizar alguna diagonal?
2. Compara un recorrido por tres lados con otro que incluya una diagonal.
3. Recuerda que la diagonal de un cuadrado siempre es más larga que un lado.

La idea clave

Cuando un problema pide un recorrido mínimo, no basta con encontrar uno corto.

Hay que demostrar que ninguno puede ser mejor.

PROBLEMA 14

Las siete tarjetas

Habilidades que entrena

- ✓ Deducción
- ✓ Organización
- ✓ Eliminación de posibilidades

Dificultad: ★★☆☆☆

Antes de empezar

Cuando una información parece poco útil, guárdala. Más adelante puede convertirse en la clave del problema.

Enunciado

Sobre una mesa hay siete tarjetas numeradas del 1 al 7.

Ana elige tres tarjetas sin enseñar cuáles son.

Solo dice:

- La suma de los tres números es 12.
- Ningún número es consecutivo de otro.

¿Qué tarjetas ha elegido?

¿Existe más de una solución?

Comprendemos el problema

Empieza escribiendo todas las formas posibles de obtener 12 con tres números distintos.

Después elimina las que no cumplen la segunda condición.

Pistas

1. ¿Puede aparecer el número 7?
 2. ¿Puede aparecer el 6?
 3. Comprueba cuidadosamente las posibilidades restantes.
-

La idea clave

En algunos problemas no existe una única respuesta.

También es importante descubrir cuándo los datos son insuficientes.

PROBLEMA 15

El número misterioso

Habilidades que entrena

- ✓ Divisibilidad
- ✓ Razonamiento
- ✓ Organización

Dificultad: ★★☆☆☆

Antes de empezar

Las reglas de divisibilidad son pistas. La solución aparece cuando consigues hacerlas trabajar juntas.

Enunciado

Un número de cuatro cifras tiene la forma

A5B2

Se sabe que:

- es divisible por 4;
- es divisible por 9;
- es mayor que 8000.

¿Cuál es el número?

Comprendemos el problema

Cada condición elimina varias posibilidades.

No intentes adivinar el número.

Razona paso a paso.

Pistas

1. ¿Qué valores puede tomar B para que el número sea divisible por 4?
 2. ¿Qué exige la divisibilidad por 9?
 3. ¿Qué significa que el número sea mayor que 8000?
-

La idea clave

Muchos problemas de divisibilidad no requieren probar todas las posibilidades.

Conviene combinar las condiciones para eliminar casos rápidamente.

PROBLEMA 16

Los faroles de la plaza

Habilidades que entrena

- ✓ Conteo
- ✓ Geometría
- ✓ Organización de la información

Dificultad: ★★☆☆☆

Antes de empezar

Cuando un dibujo tiene muchas líneas, no las cuentes directamente.

Busca una forma de organizarlas.

Enunciado

En una plaza hay **6 faroles** colocados formando un hexágono regular.

El ayuntamiento quiere unir con un cable **cada farol con todos los demás**.

¿Cuántos cables serán necesarios?

Explica cómo realizas el recuento sin repetir ningún cable.

Comprendemos el problema

Cada cable une exactamente dos faroles.

Si cuentas los cables desde cada farol, cada uno aparecerá dos veces.

¿Cómo evitar ese problema?

Pistas

1. Empieza por un solo farol. ¿Con cuántos se une?

2. Cuando pases al segundo, ya habrá un cable contado.
3. Escribe una suma ordenada.

La idea clave

Cuando un problema consiste en unir parejas de elementos, conviene contarlas de forma ordenada para no repetir ninguna.

PROBLEMA 17

El cuadrado recortado

Habilidades que entrena

- ✓ Visualización espacial
- ✓ Áreas
- ✓ Descomposición de figuras

Dificultad: ★★★★★☆

Antes de empezar

Una figura complicada puede convertirse en varias figuras sencillas.

Enunciado

Un cuadrado de **12 cm de lado** tiene recortado en una esquina un cuadrado de **4 cm de lado**.

¿Cuál es el área de la figura que queda?

¿Y cuál es su perímetro?

Comprendemos el problema

El área y el perímetro no siempre cambian de la misma forma.

Calcula primero el área.

Después analiza cuidadosamente el contorno.

Pistas

1. ¿Cuál era el área del cuadrado grande?
2. ¿Cuánto ocupa el cuadrado recortado?
3. Dibuja el nuevo contorno antes de medirlo.

La idea clave

Modificar una figura puede cambiar su área sin cambiar su perímetro.

Área y perímetro son magnitudes diferentes.

PROBLEMA 18

La fila del cine

Habilidades que entrena

- ✓ Lógica
- ✓ Deducción
- ✓ Organización

Dificultad: ★★★★★☆

Antes de empezar

Cuando varias condiciones deben cumplirse a la vez, conviene fijar primero las posiciones seguras.

Enunciado

Cinco amigos —**Ana, Bruno, Carla, David y Elena**— se sientan en una fila de cinco butacas numeradas del 1 al 5.

Se sabe que:

- Ana no está en ninguno de los extremos.
- Bruno está inmediatamente a la izquierda de Carla.
- David está en una butaca de número impar.
- Elena está a la derecha de Ana.
- Carla no ocupa la butaca 5.

¿Cómo están sentados?

Comprendemos el problema

No empieces probando todas las posibilidades.

Busca primero la condición más restrictiva.

Pistas

1. Bruno y Carla forman un bloque.

¿Qué posiciones puede ocupar ese bloque?

2. Ana no puede ocupar las butacas 1 ni 5.

3. Comprueba qué ocurre con David y Elena.

La idea clave

En los problemas de ordenación, es más eficaz **fixar primero los bloques y las posiciones restringidas** que probar todas las combinaciones posibles.

PROBLEMA 19

Las pegatinas de Lucía

Habilidades que entrena

- ✓ Organización de la información
- ✓ Razonamiento lógico
- ✓ Planteamiento de estrategias

Dificultad: ★★☆☆☆ (Nivel 1.º-2.º ESO)

Antes de empezar

Cuando una cantidad cambia siempre de la misma manera, conviene seguir el proceso paso a paso.

Enunciado

Lucía tiene una caja con **48 pegatinas**.

Cada semana hace lo siguiente:

- Regala exactamente **6 pegatinas** a sus amigos.
- Después compra **4 pegatinas nuevas**.

Repite este proceso todas las semanas.

¿Cuántas pegatinas tendrá al terminar la quinta semana?

¿Y después de cuántas semanas le quedarán exactamente 20 pegatinas?

Comprendemos el problema

En cada semana ocurren dos acciones.

No las mezcles.

Calcula primero qué cambio total se produce cada semana.

Pistas

1. ¿Cuántas pegatinas pierde realmente cada semana?
2. Empieza escribiendo la cantidad que tendrá después de la primera semana.
3. Busca un patrón.

Solución

Cada semana:

Regala 6.

Compra 4.

En total pierde:

$6 - 4 = 2$ **pegatinas.**

Comenzó con 48.

Después de cinco semanas:

$48 - (5 \times 2)$

$48 - 10$

$= 38$ pegatinas.

Ahora busquemos cuándo tendrá 20.

Debe perder:

$48 - 20 = 28.$

Como pierde 2 por semana:

$28 \div 2 = 14$ **semanas.**

Respuesta

Después de cinco semanas tendrá **38 pegatinas.**

Después de **14 semanas** tendrá **20 pegatinas.**

La idea clave

En muchos problemas no es necesario estudiar todos los cambios por separado.

Primero conviene averiguar el **cambio neto.**

Un reto

¿Y si cada semana regalara 7 pegatinas y comprara 5?

¿Cambiaría el resultado?

PROBLEMA 20

Los números escondidos

Habilidades que entrena

✓ Observación

✓ Patrones

✓ Deducción

Dificultad: ★★☆☆☆ (Nivel 1.º-2.º ESO)

Antes de empezar

Muchas sucesiones no se descubren haciendo cuentas complicadas, sino observando con atención.

Enunciado

En una pizarra aparecen escritos estos números:

2, 6, 12, 20, 30, ...

Un alumno dice que el siguiente número es **42**.

Otro afirma que es **40**.

¿Quién tiene razón? Explica por qué.

Después escribe los dos números siguientes.

Comprendemos el problema

No busques únicamente cuánto aumenta cada vez.

Observa también cómo se obtiene cada término.

Puede haber más de una forma de verlo.

Pistas

1. Calcula cuánto aumenta la sucesión.

2. ¿Qué relación tienen los números con los productos 1×2 , 2×3 , 3×4 ...?

3. Comprueba si existe una regla que sirva para todos los términos.

Solución

Las diferencias entre términos son:

- $6 - 2 = 4$
- $12 - 6 = 6$
- $20 - 12 = 8$
- $30 - 20 = 10$

Cada vez aumenta **2 más** que la anterior.

Por tanto, la siguiente diferencia será **12**.

$30 + 12 = 42$.

También podemos observar que:

$$2 = 1 \times 2$$

$$6 = 2 \times 3$$

$$12 = 3 \times 4$$

$$20 = 4 \times 5$$

$$30 = 5 \times 6$$

Así, el siguiente término será:

$$6 \times 7 = \mathbf{42}.$$

Los dos siguientes serán:

$$7 \times 8 = \mathbf{56}$$

$$8 \times 9 = \mathbf{72}$$

Respuesta

Tiene razón el **primer alumno**.

La sucesión continúa así:

42, 56, 72.

La idea clave

Cuando estudias una sucesión, intenta descubrir **la regla de formación**, no solo las diferencias entre términos.

Encontrar varias maneras de interpretar un mismo patrón es una habilidad muy valiosa en las Olimpiadas Matemáticas.

Un reto

Inventa otra sucesión cuyos cuatro primeros términos sean:

3, 8, 15, 24

y explica cuál es la regla que has utilizado.

Problemas de preparación para Olimpiada Matemática Escolar 2.º Y 3.º de ESO

Generados con la IA chatGPT

PROBLEMA 1

Las cajas etiquetadas

Habilidad principal

Razonamiento lógico • Eliminación de posibilidades • Estrategia

Dificultad: ★☆☆☆☆

Antes de empezar...

Una buena estrategia consiste en desconfiar de lo que parece evidente.

En este problema no tendrás que hacer ninguna operación. Solo pensar con orden.

Enunciado

Sobre una mesa hay **tres cajas cerradas**.

Una contiene **solo canicas rojas**, otra contiene **solo canicas azules** y la tercera contiene **canicas rojas y azules**.

Las tres cajas están etiquetadas así:

- **Rojas**
- **Azules**
- **Rojas y azules**

Sin embargo, el encargado del almacén advierte:

Las tres etiquetas están colocadas de forma incorrecta.

Puedes abrir **una sola caja** y sacar **una única canica**, sin mirar el interior. Después de observar su color, deberás colocar correctamente las tres etiquetas.

¿De qué caja debes sacar la canica y cómo puedes averiguar la etiqueta correcta de las tres cajas?

Comprendemos el problema

Antes de intentar resolverlo, piensa en estas preguntas.

- ¿Qué significa que **las tres etiquetas sean incorrectas**?
- ¿Qué caja proporciona más información si sacas una canica?
- ¿Podría bastar una sola observación para identificar todas las cajas?

No empieces probando posibilidades al azar. Busca primero la información más valiosa.

Pista 1

Si abres una caja cuya etiqueta dice **"Rojas"**, ¿podría contener únicamente canicas rojas?

Pista 2

La caja etiquetada **"Rojas y azules"** no puede contener una mezcla. Solo puede contener un único color.

¿Por qué es la mejor elección para sacar una canica?

Pista 3

Imagina que sacas una canica roja.

¿Qué sabes inmediatamente sobre esa caja?

¿Y qué ocurre con las otras dos?

PROBLEMA 2

El puente de piedra

Habilidades que entrena

- ✓ Organización de la información
- ✓ Estrategia
- ✓ Eliminación de posibilidades
- ✓ Razonamiento lógico

Dificultad: ★★☆☆☆

Una idea antes de empezar

Cuando un problema parece complicado, dibuja un esquema lo más sencillo posible.

Un buen dibujo no resuelve el problema, pero casi siempre ayuda a entenderlo.

Enunciado

Un pequeño pueblo está dividido por un río.

Hay cuatro zonas de paseo, una a cada lado del río, comunicadas por **siete puentes**.

Un turista quiere salir de su hotel, dar un paseo cruzando **cada puente exactamente una vez** y volver al punto de partida.

¿Es posible hacerlo?

Si crees que sí, explica cómo.

Si crees que no, justifica por qué.

Comprendemos el problema

Este no es un problema de cálculo.

Ni siquiera necesitas medir distancias.

La pregunta es otra:

¿Qué condiciones debe cumplir un recorrido para poder pasar exactamente una vez por cada puente?

Haz primero un dibujo sencillo con cuatro zonas y siete puentes.
No importa que el dibujo no sea perfecto.

Pista 1

Olvídate de la forma del río.
Solo importa cómo están unidas las cuatro zonas.

Pista 2

Cada vez que entras en una zona, salvo al principio y al final, también tendrás que salir de ella.

¿Qué significa eso respecto al número de puentes que llegan a cada zona?

Pista 3

Cuenta cuántos puentes llegan a cada una de las cuatro zonas.
¿Qué observas?

Solución

Cada puente une dos zonas.

Cuando recorremos todos los puentes exactamente una vez, ocurre algo importante:

Cada vez que entramos en una zona debemos salir de ella, excepto quizá en el punto de inicio o en el de llegada.

Por ello:

- las zonas intermedias deben tener un número **par** de puentes;
- si queremos empezar y terminar en el mismo lugar, **todas** las zonas deben tener un número par de puentes.

En este problema ocurre que las cuatro zonas tienen un número impar de puentes.

Eso hace imposible construir el recorrido pedido.

No importa el camino que intentemos.

Siempre llegará un momento en el que quedará un puente sin poder cruzar.

Respuesta

No es posible recorrer los siete puentes exactamente una vez y regresar al punto de partida.

¿Qué hemos descubierto?

Acabas de resolver uno de los problemas más famosos de la historia de las Matemáticas.

Lo importante no era encontrar un recorrido.

Lo importante era demostrar que **no podía existir**.

A veces, en Matemáticas, demostrar que algo es imposible es tan valioso como encontrar una solución.

La idea clave

Muchos problemas de recorridos no dependen de las distancias ni de los dibujos.

Dependen únicamente de **cómo están conectados los lugares**.

Esa idea dio origen a una rama de las Matemáticas llamada **teoría de grafos**, que hoy se utiliza para diseñar redes de transporte, internet, GPS y muchas aplicaciones informáticas.

PROBLEMA 3

La balanza del mercader

Habilidades que entrena

- ✓ Razonamiento lógico
- ✓ Pensar hacia atrás
- ✓ Eliminación de posibilidades

Dificultad: ★★☆☆☆

Antes de empezar...

A veces es más útil preguntarse qué no puede ocurrir que intentar encontrar directamente la respuesta.

Enunciado

Un mercader tiene **nueve sacos** aparentemente iguales de arroz.

Todos pesan exactamente **20 kg**, excepto uno, que pesa **21 kg**.

Dispones de una balanza de dos platillos, sin pesas.

¿Cuál es el menor número de pesadas necesarias para localizar con total seguridad el saco más pesado?
Explica cómo lo harías.

Comprendemos el problema

No importa cuánto pesa exactamente cada saco.

Solo necesitas descubrir cuál es el diferente.

Cada pesada puede dar tres resultados:

- pesa más el platillo izquierdo;
- pesa más el derecho;
- ambos pesan igual.

¿Cómo aprovechar al máximo esa información?

Pista 1

No empieces comparando un saco con otro.

Sería demasiado lento.

Pista 2

¿Puedes dividir los nueve sacos en grupos iguales?

Pista 3

Después de la primera pesada, ¿cuántos sacos seguirán siendo sospechosos?

La idea clave

Cada pesada debe proporcionar la mayor información posible.

No siempre gana quien hace más pruebas, sino quien formula mejor la primera.

PROBLEMA 4

El reloj del campanario

Habilidades que entrena

- ✓ Geometría
- ✓ Observación
- ✓ Búsqueda de patrones

Dificultad: ★★☆☆☆

Antes de empezar...

Los relojes esconden mucha geometría.

No pienses en horas.

Piensa en ángulos.

Enunciado

El reloj del campanario marca exactamente las **12:00**.

¿Cuál será la **primera hora** después de las doce en la que las dos agujas formen un ángulo de **180°**?

Da la respuesta con precisión de segundos.

Comprendemos el problema

Las agujas no saltan de minuto en minuto.

Se mueven continuamente.

La aguja pequeña también avanza mientras la grande gira.

Pista 1

¿Cuántos grados recorre cada aguja en un minuto?

Pista 2

No basta con que la aguja grande llegue al 6.

La pequeña también habrá avanzado.

Pista 3

Busca cuándo la diferencia entre ambas posiciones sea exactamente 180°.

La idea clave

Cuando dos objetos se mueven, muchas veces es más sencillo estudiar **la diferencia entre sus velocidades**.

PROBLEMA 5

El patio de los azulejos

Habilidades que entrena

✓ Generalización

- ✓ Patrones
- ✓ Geometría

Dificultad: ★★☆☆☆

Antes de empezar...

Cuando una figura crece, no vuelvas a contar desde el principio.

Pregúntate qué cambia de una figura a la siguiente.

Enunciado

Un patio se decora colocando azulejos cuadrados.

La figura 1 está formada por un único azulejo.

En cada nueva figura se añade una fila completa por abajo y una columna completa por la derecha, formando siempre un cuadrado mayor.

Así:

- Figura 1 $\rightarrow 1 \times 1$
- Figura 2 $\rightarrow 2 \times 2$
- Figura 3 $\rightarrow 3 \times 3$
- ...

¿Cuántos azulejos nuevos se añaden al pasar de la figura 24 a la figura 25?

Comprendemos el problema

No hace falta calcular cuántos azulejos tienen las dos figuras.

Solo interesa saber cuántos **se incorporan**.

Haz un dibujo de las figuras 3 y 4.

Pista 1

¿Cuántos azulejos tiene un cuadrado de lado 24?

¿Y uno de lado 25?

Pista 2

En lugar de calcular ambas cantidades por separado, piensa en la fila y la columna que aparecen.

Pista 3

La esquina nueva pertenece a la fila y a la columna.

No la cuentas dos veces.

La idea clave

En muchos problemas de crecimiento es mejor fijarse en **lo que cambia** que volver a contar toda la figura.

PROBLEMA 6

El torneo del instituto

Habilidades que entrena

- ✓ Conteo organizado
- ✓ Combinatoria elemental
- ✓ Búsqueda de patrones

Dificultad: ★★☆☆☆

Antes de empezar...

Cuando aparecen muchas parejas, una lista ordenada suele ser mejor que intentar contarlas de memoria.

Enunciado

En un instituto se organiza un torneo de ajedrez.

Participan **8 alumnos** y cada uno debe jugar **exactamente una partida contra cada uno de los demás**.

Al finalizar el torneo, el profesor pregunta:

¿Cuántas partidas se han jugado en total?

No se permite utilizar ninguna fórmula conocida. Debes razonar la respuesta.

Comprendemos el problema

Cada partida enfrenta a **dos jugadores**.

Si cuentas las partidas jugador por jugador, corres el riesgo de contarlas dos veces.

Busca una forma de evitar ese error.

Pista 1

Empieza por el primer jugador.

¿Contra cuántos rivales juega?

Pista 2

Cuando pases al segundo jugador, ya habrá disputado una partida.
No la vuelvas a contar.

Pista 3

Escribe una suma ordenada.

La idea clave

Cuando un problema consiste en formar parejas, conviene organizar el recuento para que ninguna pareja aparezca dos veces.

PROBLEMA 7

El jardín triangular

Habilidades que entrena

- ✓ Geometría
- ✓ Visualización espacial
- ✓ División de figuras

Dificultad: ★★☆☆☆

Antes de empezar...

Una figura complicada suele esconder otras mucho más sencillas.

Enunciado

Un jardinero ha dibujado un gran triángulo equilátero.

Une los puntos medios de sus tres lados y obtiene cuatro triángulos equiláteros iguales.

Después repite el mismo proceso únicamente sobre el triángulo central.
¿Cuántos triángulos equiláteros aparecen ahora en total?

Comprendemos el problema

No basta con contar los triángulos pequeños.

Hay triángulos de distintos tamaños.

Haz un dibujo antes de empezar.

Pista 1

Cuenta primero los triángulos más pequeños.

Pista 2

Después busca triángulos formados por varios pequeños.

Pista 3

No olvides el triángulo grande.

La idea clave

Cuando una figura está subdividida, conviene contar por tamaños para evitar olvidos o repeticiones.

PROBLEMA 8

La caja de monedas

Habilidades que entrena

- ✓ Invariantes
- ✓ Estrategia
- ✓ Razonamiento lógico

Dificultad: ★★☆☆☆

Antes de empezar...

A veces muchas acciones cambian la apariencia de una situación, pero hay una propiedad que nunca cambia. Esa propiedad se llama invariante.

Enunciado

En una caja hay **15 monedas**, todas mostrando cara.

En cada movimiento debes elegir **exactamente 4 monedas** y darles la vuelta al mismo tiempo.

¿Es posible conseguir que, después de varios movimientos, **todas las monedas queden mostrando cruz?**

Explica tu razonamiento.

Comprendemos el problema

No intentes probar movimientos al azar.

Busca una propiedad que permanezca igual o que cambie siempre del mismo modo.

Pista 1

Cuenta cuántas monedas muestran cara.

Pista 2

Después de un movimiento pueden cambiar entre 0 y 4 caras en distintos sentidos.

¿Qué ocurre con la paridad (par o impar) del número de caras?

Pista 3

Compara la situación inicial con la final.

La idea clave

Los **invariantes** son una de las herramientas más poderosas de las Olimpiadas Matemáticas. En lugar de seguir todos los movimientos, buscamos una propiedad que nunca cambia y usamos esa información para demostrar que algo es posible... o imposible.

PROBLEMA 9

El laberinto cuadriculado

Habilidades que entrena

- ✓ Organización de la información
- ✓ Conteo sistemático
- ✓ Estrategia
- ✓ Visualización espacial

Dificultad: ★★☆☆☆

Antes de empezar...

Cuando un problema tiene muchos caminos posibles, no conviene recorrerlos todos.

Busca una forma ordenada de contarlos.

Enunciado

Un robot se encuentra en la esquina inferior izquierda de una cuadrícula formada por **4 × 4 cuadrados**.

Quiere llegar a la esquina superior derecha.

Solo puede moverse:

- una casilla hacia la derecha;
- una casilla hacia arriba.

¿Cuántos caminos diferentes puede seguir?

Comprendemos el problema

No intentes dibujar todos los recorridos.

Pronto serán demasiados.

Existe una forma mucho más inteligente de contarlos.

Pista 1

Empieza resolviendo una cuadrícula de **1 × 1**.

Después prueba con una de **2 × 2**.

Pista 2

¿Cuántas formas hay de llegar a un punto determinado?

Observa que todos los caminos llegan desde la izquierda o desde abajo.

Pista 3

Escribe el número de caminos en cada vértice de la cuadrícula.

Cada número será la suma de los dos anteriores.

La idea clave

Muchos problemas de conteo pueden resolverse **construyendo la respuesta poco a poco**, aprovechando resultados anteriores.

Esta estrategia aparece también en programación, informática y probabilidad.

PROBLEMA 10

La contraseña secreta

Habilidades que entrena

- ✓ Deducción lógica
- ✓ Eliminación de posibilidades
- ✓ Organización de información

Dificultad: ★★★★★☆

Antes de empezar...

No todas las pistas aportan la misma información.

Empieza siempre por la más restrictiva.

Enunciado

Una caja fuerte se abre con una contraseña formada por **tres cifras distintas**.

Dispones de las siguientes pistas:

682

→ Una cifra es correcta y está en su lugar.

614

→ Una cifra es correcta, pero está en un lugar incorrecto.

206

→ Dos cifras son correctas, pero ambas están en lugares incorrectos.

738

→ Ninguna cifra es correcta.

780

→ Una cifra es correcta, pero está en un lugar incorrecto.

¿Cuál es la contraseña?

Comprendemos el problema

No pruebes combinaciones al azar.

Cada pista elimina muchas posibilidades.

Conviene ir anotando qué cifras ya sabemos que no pueden aparecer.

Pista 1

Empieza por la pista más fácil.

¿Qué cifras puedes eliminar completamente?

Pista 2

Utiliza después la pista **780**.

Solo una de esas cifras puede pertenecer a la contraseña.
¿Cuál?

Pista 3

Ahora analiza las demás pistas una por una.
Cada nueva información reducirá aún más las posibilidades.

La idea clave

Los problemas de deducción no se resuelven probando todas las posibilidades.
Se resuelven **eliminando las imposibles** hasta que solo queda una.
Es la misma estrategia que utilizan los matemáticos, los detectives y muchos programas informáticos.

PROBLEMA 11

Las fichas del dominó

Habilidades que entrena

- ✓ Observación
- ✓ Organización
- ✓ Conteo

Dificultad: ★★☆☆☆ (nivel 1.º ESO)

Antes de empezar...

A veces la respuesta aparece antes si ordenamos la información que si empezamos a calcular.

Enunciado

Sofía coloca en fila todas las fichas de un dominó clásico, empezando por la ficha **0–0** y terminando por la ficha **6–6**.

Mientras las observa, se pregunta:

¿Cuántas veces aparece en total el número 5 en todas las fichas?

Comprendemos el problema

No hace falta escribir todas las fichas.

Piensa únicamente en las que contienen un **5**.

Pista 1

¿Qué fichas tienen un 5?

Pista 2

¿Hay alguna ficha que tenga dos cincos?

La idea clave

No siempre hay que estudiar **todas** las posibilidades.

Muchas veces basta con fijarse únicamente en las que interesan.

PROBLEMA 12

Los escalones del parque

Habilidades que entrena

- ✓ Patrones
- ✓ Generalización
- ✓ Pensamiento algebraico

Dificultad: ★★☆☆☆

Antes de empezar...

Cuando una situación se repite, busca qué cambia y qué permanece igual.

Enunciado

Un parque tiene una escalera muy peculiar.

En el primer tramo hay **3 escalones**.

En el segundo tramo hay **5 escalones**.

En el tercero hay **7 escalones**.

Y así sucesivamente: cada tramo tiene **2 escalones más** que el anterior.

¿Cuántos escalones tendrá el tramo número 25?

¿Y cuántos escalones habrá en total desde el primer tramo hasta el tramo número 25?

Comprendemos el problema

La primera pregunta es sencilla.

La segunda requiere organizar la información.

Busca primero el patrón.

Pista 1

Escribe los cinco primeros términos.

Pista 2

¿Cuánto aumenta cada vez?

Pista 3

Para sumar todos los escalones, prueba a sumar el primero con el último.

La idea clave

Buscar simetrías en una suma puede evitar cálculos largos.

PROBLEMA 13

El camino del jardinero

Habilidades que entrena

- ✓ Estrategia
- ✓ Optimización
- ✓ Geometría intuitiva

Dificultad: ★★☆☆☆

Antes de empezar

El camino más corto entre dos puntos es una línea recta. Pero cuando hay varios puntos, la mejor solución no siempre es la más evidente.

Enunciado

Un jardinero debe regar cuatro árboles situados en los vértices de un cuadrado de 20 metros de lado.

Empieza junto a uno de los árboles y debe visitar los cuatro exactamente una vez.

No necesita volver al punto inicial.

¿Cuál es la menor distancia que puede recorrer?

Explica por qué no puede hacerse un recorrido más corto.

Comprendemos el problema

Dibuja primero el cuadrado.

Después piensa en distintos recorridos posibles.

No basta con encontrar uno corto; hay que justificar que es el mejor.

Pistas

1. ¿Es obligatorio utilizar alguna diagonal?
 2. Compara un recorrido por tres lados con otro que incluya una diagonal.
 3. Recuerda que la diagonal de un cuadrado siempre es más larga que un lado.
-

La idea clave

Cuando un problema pide un recorrido mínimo, no basta con encontrar uno corto.

Hay que demostrar que ninguno puede ser mejor.

PROBLEMA 14

Las siete tarjetas

Habilidades que entrena

- ✓ Deducción
- ✓ Organización
- ✓ Eliminación de posibilidades

Dificultad: ★★☆☆☆

Antes de empezar

Cuando una información parece poco útil, guárdala. Más adelante puede convertirse en la clave del problema.

Enunciado

Sobre una mesa hay siete tarjetas numeradas del 1 al 7.

Ana elige tres tarjetas sin enseñar cuáles son.

Solo dice:

- La suma de los tres números es 12.
- Ningún número es consecutivo de otro.

¿Qué tarjetas ha elegido?

¿Existe más de una solución?

Comprendemos el problema

Empieza escribiendo todas las formas posibles de obtener 12 con tres números distintos.

Después elimina las que no cumplen la segunda condición.

Pistas

1. ¿Puede aparecer el número 7?
 2. ¿Puede aparecer el 6?
 3. Comprueba cuidadosamente las posibilidades restantes.
-

La idea clave

En algunos problemas no existe una única respuesta.

También es importante descubrir cuándo los datos son insuficientes.

PROBLEMA 15

El número misterioso

Habilidades que entrena

- ✓ Divisibilidad
- ✓ Razonamiento
- ✓ Organización

Dificultad: ★★★★★☆

Antes de empezar

Las reglas de divisibilidad son pistas. La solución aparece cuando consigues hacerlas trabajar juntas.

Enunciado

Un número de cuatro cifras tiene la forma

A5B2

Se sabe que:

- es divisible por 4;
- es divisible por 9;
- es mayor que 8000.

¿Cuál es el número?

Comprendemos el problema

Cada condición elimina varias posibilidades.

No intentes adivinar el número.

Razona paso a paso.

Pistas

1. ¿Qué valores puede tomar B para que el número sea divisible por 4?
 2. ¿Qué exige la divisibilidad por 9?
 3. ¿Qué significa que el número sea mayor que 8000?
-

La idea clave

Muchos problemas de divisibilidad no requieren probar todas las posibilidades.

Conviene combinar las condiciones para eliminar casos rápidamente.

PROBLEMA 16

Los faroles de la plaza

Habilidades que entrena

- ✓ Conteo
- ✓ Geometría
- ✓ Organización de la información

Dificultad: ★★★★★☆

Antes de empezar

Cuando un dibujo tiene muchas líneas, no las cuentes directamente.

Busca una forma de organizarlas.

Enunciado

En una plaza hay **6 faroles** colocados formando un hexágono regular.

El ayuntamiento quiere unir con un cable **cada farol con todos los demás.**

¿Cuántos cables serán necesarios?

Explica cómo realizas el recuento sin repetir ningún cable.

Comprendemos el problema

Cada cable une exactamente dos faroles.

Si cuentas los cables desde cada farol, cada uno aparecerá dos veces.
¿Cómo evitar ese problema?

Pistas

1. Empieza por un solo farol. ¿Con cuántos se une?
 2. Cuando pases al segundo, ya habrá un cable contado.
 3. Escribe una suma ordenada.
-

La idea clave

Cuando un problema consiste en unir parejas de elementos, conviene contarlas de forma ordenada para no repetir ninguna.

PROBLEMA 17

El cuadrado recortado

Habilidades que entrena

- ✓ Visualización espacial
- ✓ Áreas
- ✓ Descomposición de figuras

Dificultad: ★★☆☆☆

Antes de empezar

Una figura complicada puede convertirse en varias figuras sencillas.

Enunciado

Un cuadrado de **12 cm de lado** tiene recortado en una esquina un cuadrado de **4 cm de lado**.

¿Cuál es el área de la figura que queda?

¿Y cuál es su perímetro?

Comprendemos el problema

El área y el perímetro no siempre cambian de la misma forma.

Calcula primero el área.

Después analiza cuidadosamente el contorno.

Pistas

1. ¿Cuál era el área del cuadrado grande?

2. ¿Cuánto ocupa el cuadrado recortado?
 3. Dibuja el nuevo contorno antes de medirlo.
-

La idea clave

Modificar una figura puede cambiar su área sin cambiar su perímetro.
Área y perímetro son magnitudes diferentes.

PROBLEMA 18

La fila del cine

Habilidades que entrena

- ✓ Lógica
- ✓ Deducción
- ✓ Organización

Dificultad: ★★★★★☆

Antes de empezar

Cuando varias condiciones deben cumplirse a la vez, conviene fijar primero las posiciones seguras.

Enunciado

Cinco amigos —**Ana, Bruno, Carla, David y Elena**— se sientan en una fila de cinco butacas numeradas del 1 al 5.

Se sabe que:

- Ana no está en ninguno de los extremos.
- Bruno está inmediatamente a la izquierda de Carla.
- David está en una butaca de número impar.
- Elena está a la derecha de Ana.
- Carla no ocupa la butaca 5.

¿Cómo están sentados?

Comprendemos el problema

No empieces probando todas las posibilidades.
Busca primero la condición más restrictiva.

Pistas

1. Bruno y Carla forman un bloque.
¿Qué posiciones puede ocupar ese bloque?
 2. Ana no puede ocupar las butacas 1 ni 5.
 3. Comprueba qué ocurre con David y Elena.
-

La idea clave

En los problemas de ordenación, es más eficaz **fixar primero los bloques y las posiciones restringidas** que probar todas las combinaciones posibles.

PROBLEMA 19

Las pegatinas de Lucía

Habilidades que entrena

- ✓ Organización de la información
- ✓ Razonamiento lógico
- ✓ Planteamiento de estrategias

Dificultad: ★★☆☆☆ (Nivel 1.º-2.º ESO)

Antes de empezar

Cuando una cantidad cambia siempre de la misma manera, conviene seguir el proceso paso a paso.

Enunciado

Lucía tiene una caja con **48 pegatinas**.

Cada semana hace lo siguiente:

- Regala exactamente **6 pegatinas** a sus amigos.
- Después compra **4 pegatinas nuevas**.

Repite este proceso todas las semanas.

¿Cuántas pegatinas tendrá al terminar la quinta semana?

¿Y después de cuántas semanas le quedarán exactamente 20 pegatinas?

Comprendemos el problema

En cada semana ocurren dos acciones.

No las mezcles.

Calcula primero qué cambio total se produce cada semana.

Pistas

1. ¿Cuántas pegatinas pierde realmente cada semana?
2. Empieza escribiendo la cantidad que tendrá después de la primera semana.
3. Busca un patrón.

La idea clave

En muchos problemas no es necesario estudiar todos los cambios por separado.

Primero conviene averiguar el **cambio neto**.

PROBLEMA 20

Los números escondidos

Habilidades que entrena

- ✓ Observación
- ✓ Patrones
- ✓ Deducción

Dificultad: ★★☆☆☆ (Nivel 1.º-2.º ESO)

Antes de empezar

Muchas sucesiones no se descubren haciendo cuentas complicadas, sino observando con atención.

Enunciado

En una pizarra aparecen escritos estos números:

2, 6, 12, 20, 30, ...

Un alumno dice que el siguiente número es **42**.

Otro afirma que es **40**.

¿Quién tiene razón? Explica por qué.

Después escribe los dos números siguientes.

Comprendemos el problema

No busques únicamente cuánto aumenta cada vez.

Observa también cómo se obtiene cada término.

Puede haber más de una forma de verlo.

Pistas

1. Calcula cuánto aumenta la sucesión.
 2. ¿Qué relación tienen los números con los productos 1×2 , 2×3 , 3×4 ...?
 3. Comprueba si existe una regla que sirva para todos los términos.
-

La idea clave

Cuando estudias una sucesión, intenta descubrir **la regla de formación**, no solo las diferencias entre términos.

Encontrar varias maneras de interpretar un mismo patrón es una habilidad muy valiosa en las Olimpiadas Matemáticas.
